

Existence d'une solution faible pour l'écoulement d'un fluide micropolaire

Fatiha *Djetoui*

1^{er} juillet 2018

Notations

Soit Ω un ouvert bornée de \mathbb{R}^n .

\cdot Produit scalaire

\times produit vectoriel

$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ (La norme dans $L^2(\Omega)$)

$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ (La norme dans $H_0^1(\Omega)$)

\longrightarrow La convergrnce forte

\rightharpoonup La convergence faible

\rightharpoonup^* La convergence faible *

\equiv Equivalence

$D(\Omega)$ Espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω

$D'(\Omega)$ Espace des distribution sur Ω (application linéaire et continue de $D(\Omega)$ dans \mathbb{R})

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ Gradient de u

$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ Laplacien de u

$\text{curl } u = \nabla \times u$ Rotationnel de u

$\text{div } u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ Divergence de u

$(u \cdot \nabla)u = \sum_{i,j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ Le terme de advection

$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u$ Dérivée particulaire

$C^k(\Omega)$: espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, k fois continûment différentiables

Les espaces de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i (i = 1, \dots, n) \text{ tel que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in D(\Omega) \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega) \}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Table des matières

Introduction	2
1 Modélisation	3
1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?	3
1.2 Conservation de la masse	4
1.3 Equation de continuité	4
1.4 Fluide incompressible	4
1.5 La conservation du moment linéaire	5
1.6 la conservation du moment angulaire	6
1.6.1 Fluide micropolaire	6
2 Rappels mathématiques	8
2.1 Injection de Sobolev	9
2.2 Formules de Green	10
2.3 Les convergences forte, faible et faible*	11
2.4 Régularité en temps	12
3 Etude mathématique de l'écoulement d'un fluide micropolaire	15
3.1 Position de problème	15
3.2 Estimation à priori	17
3.3 Formulation variationnelle	19
3.4 Méthode de Faedo-Galerkin	20
3.5 Compacité des solutions	22

3.6	Passage à la limite dans le système approchée	25
	Conclusion	28
	Bibliographie	29

Introduction

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude de l'écoulement d'un fluide micropolaire incompressible. Notre but est de montrer l'existence d'une solution faible du système décrivant ce phénomène.

Le modèle des fluides micropolaires est une partie de la théorie des fluides ayant une microstructure, il a été introduit par Eringen en 1966 voir ([4]). Ce modèle présente des effets microscopiques résultant de la structure locale et du micromouvement des éléments fluids. Eringen a été proposé comme une modification essentielle des équations de Navier-Stokes classiques dans le but de décrire le mouvement de divers fluides, constitués de particules rigides, orientées de manière aléatoire suspendues dans un milieu visqueux où la déformation des particules est négligable, tels que les suspensions, le sang animal, les cristaux liquides,...ect.

Le système qu'on va étudier est constitué de trois équations, la première est l'équation de continuité pour les fluides incompressibles, la deuxième est l'équation de Navier-Stokes satisfaite par la vitesse du fluide u et la troisième est l'équation de conservation du moment angulaire satisfaite par la vitesse angulaire des particules du fluide ω . Ce système est donné sous la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - (\mu + \mu_r) \Delta u + \nabla p &= \rho f + 2\mu_r \operatorname{curl} \omega, \\ \rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega \right) - (c_a + c_d) \Delta \omega - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega &= \\ \rho g + 2\mu_r (\operatorname{curl} u - 2\omega), \end{aligned}$$

telles que

ρ : Densité du fluide, I : Moment d'inertie, μ : Viscosité newtonienne dynamique,
 μ_r : Viscosité dynamique de microrotation, c_0, c_a, c_d : Coefficients de viscosité angulaire.

Ces équations sont définies dans le cylindre $\Omega_T = \Omega \times T$, où $T > 0$ et Ω est un ouvert bornée de \mathbb{R}^3 .

Notre travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est basé sur des notions des lois de la physique comme la conservation de la masse, l'équation de continuité, la conservation du moment linéaire et angulaire qui font sortir l'origine de chaque équation.

Au deuxième chapitre, nous allons cité quelques rappels concernant l'analyse fonctionnelle qui seront les outils utilisés pour la résolution de notre système.

Dans le dernier chapitre, nous allons étudié l'écoulement d'un fluide micropolaire, en montrant l'existence d'une solution faible de ce système. Pour cet effet, nous allons utiliser la méthode de faedo-Galerkin et le lemme de compacité d'Aubin.

Chapitre 1

Modélisation

On s'intéresse, dans ce chapitre, à la modélisation mathématique d'un problème issu de la mécanique des fluides micropolaires. Nous allons présenter l'origine de chaque équation décrivant ce phénomène. Ce modèle est obtenu en utilisant les différentes loi de physique tel la conservation de la masse, la conservation du moment linéaire et la conservation du moment angulaire.

1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

Définition 1.1. (Définition d'un fluide) :

On peut définir un fluide comme l'ensemble d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et se déplacent librement les unes avec les autres. On peut également le définir comme un milieu matériel continu, déformable et qui peut s'écouler. Le fluide se présente sous forme d'un liquide (l'eau), gaz ou plasma (gaz ionisé).

Théorème 1.1. (*Théorème de transport*) voir [5] :

Soit $\Omega(t)$ un domaine occupé à l'instant t par un fluide qui s'écoule avec une vitesse u . Alors pour toute fonction vectorielle ou scalaire $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$, qui peut être vitesse, accélération, densité...ect, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \cdot \nabla f(x, t) + f(x, t) \operatorname{div} u(x, t) \right\} dx. \quad (1.1)$$

1.2 Conservation de la masse

La masse de tout domaine matériel D est constante au cours de son mouvement, c'est-à-dire la masse n'est pas perdue ou augmentée, elle est conservée.

1.3 Equation de continuité

Définition 1.2. La masse de chaque volume $\Omega(t)$ est donnée par

$$m = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \, dx.$$

où ρ désigne la densité du fluide.

D'après la loi de conservation de la masse, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \, dx = 0. \quad (1.2)$$

On utilise le théorème de transport (1.1), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \, dx &= \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u \right\} \, dx \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le volume $\Omega(t)$ étant arbitraire, on déduit l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \quad (1.3)$$

qui est appelée **équation de continuité**.

1.4 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume $\Omega(t)$ ne change pas au cours du temps

$$\operatorname{Vol}(\Omega(t)) = \operatorname{Vol}(\Omega_0), \forall t > 0,$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt} Vol (\Omega(t)) = 0.$$

En appliquant le théorème de transport (1.1) avec $f = 1$, on trouve

$$\frac{d}{dt} Vol (\Omega(t)) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dx = \int_{\Omega(t)} div u = 0.$$

Le volume $\Omega(t)$ étant arbitraire, on conclut que

$$div u = 0. \quad (1.4)$$

1.5 La conservation du moment linéaire

L'ensemble de force s'exerçant sur un élément de milieu continu sont de deux natures : forces extérieurs et forces intérieures.

Les forces extérieures : dans ce cas la force f (par unité de masse) appliquée sur un élément de $\Omega(t)$ est donnée par la formule

$$\int_{\Omega(t)} \rho f dx.$$

Les forces intérieures : dans ce cas la force f appliquée sur un volume $\Omega(t)$ est surfacique, il exprime par

$$\int_{\Gamma} t_n ds.$$

telle que :

n est la normale extérieure à un point de la surface Γ .

t_n la force par unité de surface exercée sur la surface Γ .

Par la suite le principe de conservation du moment linéaire est donnée par

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho u dx = \int_{\Omega(t)} \rho f dx + \int_{\Gamma} t_n ds.$$

Le terme $\int_{\Omega(t)} \rho u$ représente la quantité de mouvement sur le domaine $\Omega(t)$. On peut

écrire $t_n = n.T$, où n est la normale extérieure et T matrice de tenseur des contraintes.

On applique la formule de la divergence, pour l'intégrale sur Γ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho u dx &= \int_{\Omega(t)} \rho f dx + \int_{\Gamma} n.T ds \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho f dx + \int_{\Omega(t)} \text{div } T dx.\end{aligned}$$

Le domaine $\Omega(t)$ est arbitraire, ce qui donne l'équation

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \text{div } T. \quad (1.5)$$

1.6 la conservation du moment angulaire

1.6.1 Fluide micropolaire

Les fluides micropolaires sont des fluides à microstructure. C'est la théorie des fluides déduite d'une mécanique de continuité généralisée, introduite par A.Cemal Eringen (1966), dans les quels les éléments fluides locaux ne pouvaient subir que des rotation rigides sans étirement. Alors on les peut définir comme des particules orientées de manière aléatoire en suspension dans un milieu visqueux ou la déformation des particules de fluide est négligable. C'est une grande généralisation du modèle de Navier Stokes. C'est fluide se présente tel que les cristaux, des fluides vaseux, des nuages avec de la poussière et des fluides biologiques...ext.

Définition 1.3. (en cas de fluide polaire)

Soit $\rho x \times u$ le moment cinétique (angulaire) externe et $\rho I \omega$ le moment cinétique interne, où I représente le moment d'inertie et ω représente la vitesse angulaire des rotation des particules du fluide.

L'équation de la conservation du moment angulaire est donnée par

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (I \omega + x \times u) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (g + x \times f) dx + \int_{\Gamma} (c_n + x \times t_n) ds. \quad (1.6)$$

ou g couple du corps par unité de masse, c_n couple de contrainte, t_n contrainte normal, avec $t_n(x, t, n) = n(x, t).T(x, t) \Rightarrow t_n = n.T$ et de même on a $c_n = n.C$

L'équation (1.6) s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(I\omega + x \times u) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (\rho g + \rho x \times f + \nabla \cdot C + x \times (\nabla \cdot T) + T_x) dx. \quad (1.7)$$

D'autre part

$$\rho \frac{D}{Dt} (x \times u) = \rho x \times f + x \times (\nabla \cdot T). \quad (1.8)$$

Après la soustraction (1.7) - (1.8), on trouve

$$\rho I \frac{Dw}{Dt} = \rho g + \nabla \cdot C + T_x. \quad (1.9)$$

Définition 1.4. [5] On définit le tenseur des contraintes T et le tenseur des contraintes de couple C comme suit :

$$T = (-p + \lambda u_{k,k}) \sigma_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \mu_r(u_{j,i} - u_{i,j}) - 2\mu_r \epsilon_{mij} w_m.$$

$$C_{i,j} = c_0 w_{k,k} \sigma_{ij} + c_d(w_{i,j} + w_{j,i}) + c_a(w_{j,i} - w_{i,j}).$$

Telle que

ϵ_{mij} : Le tenseur alterné de Levi-Civita.

λ : Deuxième coefficient de viscosité.

Et

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Lorsque on remplace T et C dans (1.5), (1.9) on obtient

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu - \mu_r) \nabla \operatorname{div} u + (\lambda + \mu + \mu_r) \Delta u + 2\mu_r \operatorname{rot} w + \rho f. \quad (1.10)$$

$$\rho I \frac{Dw}{Dt} = 2\mu_r (\operatorname{rot} u - 2w) + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} w + (c_a + c_d) \Delta w + \rho g. \quad (1.11)$$

Le système décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible micropolaire s'écrit donc

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (1.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - (\mu + \mu_r) \Delta u + \nabla p = \rho f + 2\mu_r \operatorname{rot} w. \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \rho I \left(\frac{\partial w}{\partial t} + (u \cdot \nabla) w \right) - (c_a + c_d) \Delta w - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} w = \\ \rho g + 2\mu_r (\operatorname{rot} u - 2w). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Pour plus de détails voir le livre ([5]).

Chapitre 2

Rappels mathématiques

Proposition 2.1. (*Inégalité de Hölder*) :

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (2.1)$$

Remarque 2.1. :

Si $p = 2$ et $q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Proposition 2.2. (*Inégalité de Young*) :

Soient a et b deux réels positifs et p et q des réels strictement positifs vérifiant : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Remarque 2.2. :

Un cas simple de l'inégalité de Young avec les exposants $p = q = 2$ et ($\epsilon > 0$) est

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}. \quad (2.3)$$

Inégalité de Poincaré :

Théorème 2.1. voir [2]

Soit Ω un borné, alors il existe une constante $c > 0$, telle que

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq c |\nabla u|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Remarque 2.3. Sur $H_0^1(\Omega)$ la quantité $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de H^1 , en effet

$$\begin{aligned} |\nabla u|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|_{H_0^1} \\ &= |u|_{L^2(\Omega)} + |\nabla u|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (c + 1) |\nabla u|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Egalité de Parseval : voir [8]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{u}_m(\tau)\|_X^2 d\tau = \int_0^T \|u_m(t)\|_X^2 dt$$

2.1 Injection de Sobolev

Définition 2.1. voir [2]

X et Y deux espaces normés, l'écriture $X \subset Y$ signifie l'injection continue de X dans Y , c-à-d qu'il existe une constante k telle que

$$\|u\|_Y \leq k \|u\|_X, \forall u \in X$$

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière lipshitzienne ou $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Proposition 2.3. voir [2]

Soit $1 \leq p < \infty$, on a les injection continue suivante

- Si $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.
- Si $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \forall q \in [p, +\infty)$.
- Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

D'après la théorème de Rellich-Kodrachov (voir [2]), on a

Théorème 2.2. *supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de classe C^1 , on a les injections compacte*

- Si $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.
- Si $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \forall q \in [p, +\infty)$.
- Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

On particulier, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ injection compacte, pour tout p et n .

2.2 Formules de Green

Théorème 2.3. *(intégration par parties en dimension N) :*

Soit Ω ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 . Alors si u et $v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Gamma} u v \nu_i ds. \quad i = 1, \dots, N$$

où ν_i est la i -ème composante de la normale sortante au domaine Ω .

Théorème 2.4. *(formule de Green dans H^2) :*

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 par morceaux, $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$.

Alors

a) Pour tous champs vectoriels u, v réguliers on a

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v ds. \quad (2.4)$$

b) Pour tous champs scalaires v, u réguliers, on a

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v ds. \quad (2.5)$$

Remarque 2.4.

$$\nabla u : \nabla v = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

2.3 Les convergences forte, faible et faible*

Définition 2.2. (convergence forte)

Soit $p > 1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans L^p , (u_n) converge fortement vers u pour la norme L^p si on a

$$\|u_n\|_{L^p} \longrightarrow \|u\|_{L^p}$$

.

Définition 2.3. (convergence faible) voir [9]

soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \longrightarrow u$ faiblement dans E lorsque $n \longrightarrow \infty$ si $T(u_n) \longrightarrow T(u)$ pour tout $T \in E'$.

Définition 2.4. (convergence faible*) voir [9]

soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ et $T \in E'$. On dit que $T_n \longrightarrow T$ dans E' faible* si $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ pour tout $x \in E$.

Les espaces $L^p([0, T]; X)$:

Définition 2.5. voir [6]

Soit X un espace de Banach, on définit $L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions f mesurables de $]0, T[$ à valeurs dans X , muni de la norme

si $1 \leq p < \infty$:

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

si $p = \infty$:

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \|f(t)\|_X.$$

Définition 2.6. voir ([6], [8])

Pour $\gamma > 0$, on définit l'espace :

$$H^\gamma(0, T; X_0, X_1) = \{u \in L^2(0, T; X_0); D_t^\gamma u \in L^2(0, T; X_1)\}$$

telle que X_0, X_1 sont des espaces de Hilbert, et

$$\|u\|_{H^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)} = \left\{ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}; X_0)} + \| |\tau|^\gamma \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R}; X_1)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 1. (*lemme de compacité*) voir [6]

soit X_0, X, X_1 sont des espaces de Hilbert avec les injections continues

$$X_0 \subset X \subset X_1$$

de plus, l'injection de X_0 dans X est compacte, alors l'injection de $H^\gamma(0, T; X_0, X_1)$ dans $L^2(0, T; X)$ est compacte.

2.4 Régularité en temps

• La continuité forte

Théorème 2.5. voir [1]

Soient X et Y deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$, X étant dense dans Y . Soit $T > 0$ et p, q tels que $1 \leq p, q \leq \infty$. Alors l'espace

$$E_{p,q} = \left\{ v \in L^p(0, T; X); v' = \frac{dv}{dt} \in L^q(0, T; Y) \right\}$$

s'injecte continûment dans l'espace $C([0, T]; Y)$.

• La continuité faible

Théorème 2.6. voir [1]

Soit Y un espace de Banach, on dit qu'une fonction $u : [0, T] \longrightarrow Y$ faiblement continue si pour tout $\Psi \in Y'$, la fonction défini par

$$t \in [0, T] \longrightarrow \langle \Psi(t), u(t) \rangle_{Y', Y},$$

est continue. On note par $C([0, T]; Y_{faible})$, l'espace des fonction définies de $[0, T]$ à Y qui sont faiblement continue.

Lemme 2. soit X un espace de Banach séparable et réflexif, et soit Y un espace de Banach tel que X s'injecte continûment dans Y . Alors

$$L^\infty(0, T; X) \cap C([0, T]; Y_{faible}) = C([0, T]; X_{faible})$$

Lemme 3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 connexe. On considère $f \in D'(\Omega)$, une condition nécessaire et suffisante pour que

$$f = \nabla p \text{ pour } p \in D(\Omega)$$

et que

$$\langle f, v \rangle = 0, \forall v \in D_s(\Omega)$$

où $D_s(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $D(\Omega)$ à divergence nulle. De ce lemme, on déduit une extension du théorème de De Rham aux distributions qui dépendent du temps. On a

Lemme 4. Soit $h \in D'(\]0, T[; H^{-1}(\Omega))$, telle que $\langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0, \forall v \in D_s(\Omega)$. Alors, il existe $P \in D'(\]0, T[; L^2(\Omega))$, tel que $h = \nabla p$. Si de plus $h \in W^{k,r}(0, T; H^{-1}(\Omega))$ on peut choisir $P \in W^{k,r}(0, T; L^2(\Omega))$.

Définition 2.7. (Formule des sauts)

soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} admettant des discontinuités en les points a_i, \dots, a_p , soit σ_i le saut en a_i c'est à dire que

$$\sigma_i = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$$

Alors :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^p \sigma_i \delta_{a_i}.$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz :

On a le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ou $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.7. (Cauchy-Lipschitz)

Si f continue et localement lipschitzienne en 2ème variable alors il existe une unique solution maximale : $g : u \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ou $t_0 \in u$ interval ouvert de \mathbb{R} .

• f localement lipschitzienne en $y : \forall z_0 \in \mathbb{R}^n, \exists V$ voisinage de $v(z_0), \exists$ constante de lipschitz, $\forall z, z' \in V, \forall t \in \mathbb{R}, \|f(t, z) - f(t, z')\| \leq k\|z - z'\|$

Chapitre 3

Etude mathématique de l'écoulement d'un fluide micropolaire

3.1 Position de problème

On s'intéresse dans ce travail à l'étude mathématique de l'écoulement d'un fluide micropolaire incompressibles. Ce problème est constitué de deux équations aux dérivées partielles non linéaires qui sont couplées deux à deux. La première équation est l'équation de Navier-Stokes, satisfaite par la vitesse u et la deuxième est l'équation du moment angulaire satisfaite par la microrotation ω décrivant la vitesse angulaire des particules du fluide.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 à frontière Γ assez régulière et $(T > 0)$.

On pose $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ et $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$. Le système décrivant l'écoulement d'un fluide micropolaire, qu'on note (P) est donné comme suit

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - (\mu + \mu_r) \Delta u + \nabla p = +\rho f + 2\mu_r \operatorname{curl} \omega, \quad (3.2)$$

$$\text{dans } \Omega_T,$$

$$\rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega \right) - (c_a + c_d) \Delta \omega - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega =$$

$$\rho g + 2\mu_r (\operatorname{curl} u - 2\omega), \quad (3.3)$$

dans Ω_T ,

avec les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$u = \omega = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{sur } \Omega,$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x) \quad \text{sur } \Omega.$$

On définit les espace fonctionnels, introduit par Temam [8], pour la vitesse du fluide incompressible, par

$$\mathcal{V} = \{v \in D(\Omega), \operatorname{div} v = 0\}.$$

V = la fermeture de \mathcal{V} dans $H_0^1(\Omega)$.

H = la fermeture de \mathcal{V} dans $L^2(\Omega)$.

V' = la fermeture de \mathcal{V} dans $H^{-1}(\Omega)$.

On donne

$$f \in L^2(0, T; H) \cap L^2(0, T; V') \quad (3.4)$$

$$g \in L^2(0, T; H) \cap L^2(0, T; V') \quad (3.5)$$

$$u_0 \in H \quad (3.6)$$

$$w_0 \in H \quad (3.7)$$

Lemme 5. :

On rappelle quelques propriétés du terme non linéaire de Navier-Stokes :

$\forall u, v \in V$, on a

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) v \cdot u \, dx. \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) v \cdot v \, dx = 0. \quad (3.9)$$

Lemme 6. $\forall \omega, \Psi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{curl} \omega \cdot \Psi \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{curl} \Psi \cdot \omega \, dx. \quad (3.10)$$

3.2 Estimation à priori

On multiplie (3.2), (3.3) par $u \in V$ et $\omega \in (H_0^1(\Omega))^3$ respectivement et on intègre sur Ω on trouve

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u \, dx + \rho \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot u \, dx - (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \Delta u \cdot u \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot u \, dx = \\ & \quad \rho \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \omega \cdot u \, dx. \\ & \rho I \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \cdot \omega \, dx + \rho I \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) \omega \cdot \omega \, dx - (c_a + c_d) \int_{\Omega} \Delta \omega \cdot \omega \, dx - (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \nabla \operatorname{div} \omega \cdot \omega \, dx = \\ & \quad \rho \int_{\Omega} g \cdot \omega \, dx + 2\mu_r \left(\int_{\Omega} \operatorname{curl} u \cdot \omega \, dx - 2 \int_{\Omega} \omega \cdot \omega \, dx \right). \end{aligned}$$

D'après la formule de Green

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u \, dx + (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx - \int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int_{\Omega} p \operatorname{div} u \, dx + \int_{\Gamma} p u \cdot n \, ds = \\ & \quad \rho \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \omega \cdot u \, dx. \\ & \rho I \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \cdot \omega \, dx + (c_a + c_d) \left(\int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \omega \, dx + \int_{\Gamma} \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial n} \, ds \right) + (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \operatorname{div} \omega \operatorname{div} \omega \, dx \\ & - (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Gamma} \operatorname{div} \omega \omega \cdot n \, ds = \rho \int_{\Omega} g \cdot \omega \, dx + 2\mu_r \left(\int_{\Omega} \operatorname{curl} u \cdot \omega \, dx - 2 \int_{\Omega} \omega \cdot \omega \, dx \right). \end{aligned}$$

par la suite :

$$\rho \frac{d}{dt} |u|^2 + (\mu + \mu_r) |\nabla u|^2 = \rho \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \omega \cdot u \, dx. \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \rho I \frac{d}{dt} |\omega|^2 + (c_a + c_d) |\nabla \omega|^2 + (c_0 + c_d - c_a) |\operatorname{div} \omega|^2 + 4\mu_r |\omega|^2 = \\ & \quad \rho \int_{\Omega} g \cdot \omega \, dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} u \cdot \omega \, dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

On utilise (3.10), en sommant les équations (3.11) et (3.12), on obtient l'estimation globale suivante

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (|u|^2 + I|\omega|^2) + (\mu + \mu_r)|\nabla u|^2 + (c_a + c_d)|\nabla \omega|^2 + (c_0 + c_d - c_a)|\operatorname{div} \omega|^2 + 4\mu_r|\omega|^2 = \\ \rho \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \rho \int_{\Omega} g \cdot \omega \, dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

On applique Cauchy Schwarz sur (3.13) on trouve

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (|u|^2 + I|\omega|^2) + (\mu + \mu_r)|\nabla u|^2 + (c_a + c_d)|\nabla \omega|^2 + (c_0 + c_d - c_a)|\operatorname{div} \omega|^2 + 4\mu_r|\omega|^2 \leq \\ \rho |f| |u| + \rho |g| |\omega|. \end{aligned}$$

D'après Poincaré et ($|\nabla u|_{L^2(\Omega)} \equiv \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$), on obtient

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (|u|^2 + I|\omega|^2) + (\mu + \mu_r)\|u\|^2 + (c_a + c_d)\|\omega\|^2 + (c_0 + c_d - c_a)|\operatorname{div} \omega|^2 + 4\mu_r|\omega|^2 \leq \\ \rho c |f| \|u\| + \rho c |g| \|\omega\|. \end{aligned}$$

comme $(\mu + \mu_r) > 0$, $(c_a + c_d) > 0$ et d'après l'inégalité de Young (2.2) , on a :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (|u|^2 + I|\omega|^2) + (\mu + \mu_r)\|u\|^2 + (c_a + c_d)\|\omega\|^2 + (c_0 + c_d - c_a)|\operatorname{div} \omega|^2 + 4\mu_r|\omega|^2 \leq \\ \frac{\rho^2 c^2}{2(\mu + \mu_r)} |f|^2 + \frac{(\mu + \mu_r)}{2} \|u\|^2 + \frac{\rho^2 c^2}{2(c_a + c_d)} |g|^2 + \frac{(c_a + c_d)}{2} \|\omega\|^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (|u|^2 + I|\omega|^2) + \frac{(\mu + \mu_r)}{2} \|u\|^2 + \frac{(c_a + c_d)}{2} \|\omega\|^2 + (c_0 + c_d - c_a)|\operatorname{div} \omega|^2 + 4\mu_r|\omega|^2 \leq \\ \frac{\rho^2 c^2}{2(\mu + \mu_r)} |f|^2 + \frac{\rho^2 c^2}{2(c_a + c_d)} |g|^2. \end{aligned}$$

On intègre cette dernière par rapport à t , on trouve

$$\begin{aligned} \rho (|u(t)|^2 + I|\omega(t)|^2) + \frac{(\mu + \mu_r)}{2} \int_0^t \|u(s)\|^2 ds + \frac{(c_a + c_d)}{2} \int_0^t \|\omega(s)\|^2 ds \\ + (c_0 + c_d - c_a) \int_0^t |\operatorname{div} \omega(s)|^2 ds + 4\mu_r \int_0^t |\omega(s)|^2 ds \leq \\ \frac{\rho^2 c^2}{2(\mu + \mu_r)} \int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{\rho^2 c^2}{2(c_a + c_d)} \int_0^t |g(s)|^2 ds + \rho (|u(0)|^2 + I|\omega(0)|^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

On conclut que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \cap L^2(0, T; V), \\ \omega &\in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \cap L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^3). \end{aligned}$$

3.3 Formulation variationnelle

Soit $(v, W) \in V \times (H_0^1(\Omega))^3$, la formulation variationnelle du problème (P) est donnée par

$$\rho \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot v + (u \cdot \nabla) u \cdot v \right) dx + (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \rho \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \text{curl } \omega \cdot v \, dx. \quad (3.15)$$

$$u(0) = u_0.$$

$$\begin{aligned} \rho I \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \cdot W + (u \cdot \nabla) \omega \cdot W \right) dx + (c_a + c_d) \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla W \, dx + (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \text{div } \omega \, \text{div } W \, dx \\ + 4\mu_r \int_{\Omega} \omega \cdot W \, dx = \rho \int_{\Omega} g \cdot W \, dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \text{curl } u \cdot W \, dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\omega(0) = \omega_0.$$

Théorème 3.1. (*Théorème d'existence*)

On suppose que les hypothèses (3.4)-(3.7). Alors le système (P) admet une solution faible

$$u \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \cap L^2(0, T; V),$$

$$\omega \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \cap L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^3).$$

Satisfait l'estimation (3.14).

Pour la preuve de ce théorème on utilise la méthode de Faedo-Galerkin, elle est décomposée en quatre étapes. Dans la première étapes, on montre l'existence des solutions approchées, ensuite on établit, sur les solution approchées, des estimation a priori. Comme notre système contient des termes non linéaire, on a besoin donc de montrer la compacité des solutions approchées par le lemme de compacité d'Aubin, qui est le but de la troisième étapes. A la fin, on passe à la limite dans le système approchée.

Remarque 3.1. On montre l'existence de la pression, en utilisant la théorème de De Rham.

En effet, soit $h \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega))$, est défini par

$$h = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) + (\mu + \mu_r) \Delta u + \rho f - 2\mu_r \text{rot } w.$$

Alors

$$\langle h, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0, \forall v \in V$$

Alors il existe $p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, tel que $h = \nabla p$ vérifiant l'équation

$$-\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) + (\mu + \mu_r) \Delta u + \rho f + 2\mu_r \operatorname{rot} w = \nabla p.$$

3.4 Méthode de Faedo-Galerkin

Comme les espaces V et $(H_0^1(\Omega))^3$ sont séparables alors il existe une famille libre $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \vartheta$, telle que ϑ dense dans V , l'autre $\beta_1, \dots, \beta_m \in \vartheta$, telle que ϑ dense dans $(H_0^1(\Omega))^3$.

On définit u_m, ω_m , solutions approchées de u et ω respectivement par

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \alpha_i(x).$$

$$\omega_m(t) = \sum_{i=1}^m j_{im}(t) \beta_i(x).$$

On injecte u_m et ω_m dans (3.15) et (3.16) respectivement, avec $v = \alpha_j$ et $W = \beta_j$, on obtient le système, qu'on note (P_m) suivant

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} (u'_m \cdot \alpha_j + (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot \alpha_j) dx + (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla \alpha_j dx &= \rho \int_{\Omega} f \cdot \alpha_j dx \\ + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \omega_m \cdot \alpha_j dx. & \\ u_m(0) &= u_{0m} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \rho I \int_{\Omega} (\omega'_m \cdot \beta_j + (u \cdot \nabla) \omega \cdot \beta_j) dx + (c_a + c_d) \int_{\Omega} \nabla \omega_m \cdot \nabla \beta_j dx + (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \operatorname{div} \omega_m \operatorname{div} \beta_j dx \\ + 4\mu_r \int_{\Omega} \omega_m \cdot \beta_j dx &= \rho \int_{\Omega} g \cdot \beta_j dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} u_m \cdot \beta_j dx. \\ \omega_m(0) &= \omega_{0m}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Où u_{0m} et ω_{0m} sont les projections orthogonales de u_0 et ω_0 dans $(L^2(\Omega))^3$ respectivement. ce qui donne

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ dans } (L^2(\Omega))^3, \quad \omega_{0m} \longrightarrow \omega_0 \text{ dans } (L^2(\Omega))^3. \quad (3.19)$$

par la suite, on a

$$\rho g'_{im} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle + g_{im}^2 ((\alpha_i \cdot \nabla) \alpha_i \cdot \alpha_j) + (\mu + \mu_r) g_{im} \langle \nabla \alpha_i, \nabla \alpha_j \rangle =$$

$$\rho \int_{\Omega} f \cdot \alpha_j \, dx + 2\mu_r j_{im} \int_{\Omega} \text{curl } \beta_i \cdot \alpha_j \, dx.$$

$$\rho I j'_{im} \langle \beta_i, \beta_j \rangle + g_{im} j_{im} ((\alpha_i \cdot \nabla) \beta_i \cdot \beta_j) + (c_a + c_d) j_{im} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_j \rangle$$

$$+ (c_0 + c_d - c_a) j_{im} \langle \text{div } \beta_i, \text{div } \beta_j \rangle + 4\mu_r j_{im} \langle \beta_i, \beta_j \rangle = \rho \int_{\Omega} g \cdot \beta_j \, dx + 2\mu_r g_{im} \int_{\Omega} \text{curl } \alpha_i \cdot \beta_j \, dx.$$

On sait que

$$\langle \beta_i, \beta_j \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

On obtient un système d'équations différentielle ordinaire de la forme

$$\begin{cases} g'_{im}(t) = F(t, g_{im}, j_{im}) \\ u_m(0) = u_{0m} \\ j'_{im}(t) = G(t, j_{im}, g_{im}) \\ \omega_m(0) = \omega_{0m} \end{cases}$$

F et G sont localement lipschitzienne, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipchitz, il existe g_{im} et j_{im} sur $[0, t_m]$

On a l'existence des solutions approchées, on fait un passage à la limite pour montrer l'existence de u et ω . Pour cela, on a besoin de l'estimation a priori des solutions approchées. En effet, on remarque que u_m et ω_m satisfont l'estimation globale (3.14), c'est à dire on a

$$\rho (|u_m(t)|^2 + I|\omega_m(t)|^2) + \frac{(\mu + \mu_r)}{2} \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + \frac{(c_a + c_d)}{2} \int_0^t \|\omega_m(s)\|^2 ds$$

$$\begin{aligned}
& + (c_0 + c_d - c_a) \int_0^t |\operatorname{div} \omega_m(s)|^2 ds + 4\mu_r \int_0^t |\omega_m(s)|^2 ds \leq \\
& \frac{\rho^2 c^2}{2(\mu + \mu_r)} \int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{\rho^2 c^2}{2(c_a + c_d)} \int_0^t |g(s)|^2 ds + \rho (|u_{0m}|^2 + I|\omega_{0m}|^2). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

De (3.20), on déduit qu'on peut prendre $t_m = T$, on obtient donc une existence sur tout l'intervalle $[0, T]$ des solutions approchées. De cette estimation, on déduit qu'il existe des sous suites de u_m et ω_m qu'on note toujours u_m et ω_m tel que

$$\begin{aligned}
u_m & \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0, T; V) \\
u_m & \rightharpoonup^* u \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \\
\omega_m & \rightharpoonup \omega \text{ dans } L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^3) \\
\omega_m & \rightharpoonup^* \omega \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3).
\end{aligned}$$

3.5 Compacité des solutions

Les estimations précédente ne suffisent pas pour passer à la limite à cause des termes non linéaires $(u \cdot \nabla)u$ et $(u \cdot \nabla)\omega$. Pour cela, on a besoin de montrer la compacité des solutions.

Lemme 7.

$$\begin{aligned}
u_m & \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H). \\
w_m & \longrightarrow w \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3).
\end{aligned}$$

Pour la preuve de ce lemme, on a besoin du lemme suivant

Lemme 8. *Les fonctions $((u(t) \cdot \nabla)u(t), v)$ et $((u(t) \cdot \nabla)\omega(t), v)$ sont dans $L^1(0, T; V')$, $\forall v \in V$.*

preuve :

On note $Bu(t) = (u(t) \cdot \nabla)u(t)$, et $Bu(t) \in V'$, donc elle est trilinéaire continue sur V ,

$$\|Bw\|_{V'} \leq c\|w\|^2, \forall w \in V$$

Alors

$$\int_0^T \|Bu(t)\|_{V'} dt \leq c \int_0^T \|u(t)\|^2 dt < \infty$$

Preuve de lemme (7) : Nous allons appliquer le lemme de compacité (1). On introduit \tilde{u}_m , $\tilde{\omega}_m$, \tilde{f} et \tilde{g} prolongement de u_m , ω_m , f et g respectivement par 0 en dehors de l'intervalle $[0, T]$. On remarque qu'on a deux points de discontinuité en 0 et en T. D'après la formule des sauts, on a

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}_m(t) = u'_m(t) + \sigma_1 \delta_0 + \sigma_2 \delta_T.$$

telle que

$$\sigma_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{u}_m(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \tilde{u}_m(t) = u_m(0).$$

$$\sigma_2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{u}_m(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \tilde{u}_m(t) = -u_m(T).$$

alors

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}_m(t) = u'_m(t) + u_m(0) \delta_0 - u_m(T) \delta_T.$$

D'après (3.17) et (3.18) on trouve

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} (\tilde{u}_m(t), \alpha_j) + \rho ((\tilde{u}_m(t), \nabla) \tilde{u}_m(t), \alpha_j) + (\mu + \mu_r) (\nabla \tilde{u}_m(t), \nabla \alpha_j) = \rho \int_{\Omega} \tilde{f}(t) \cdot \alpha_j \, dx \\ & + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \tilde{\omega}_m(t) \cdot \alpha_j \, dx + \rho \delta_0 \int_{\Omega} u_m(0) \cdot \alpha_j \, dx - \rho \delta_T \int_{\Omega} u_m(T) \cdot \alpha_j \, dx. \\ & \rho I \frac{d}{dt} (\tilde{\omega}_m(t), \beta_j) + \rho I ((\tilde{u}_m(t), \nabla) \tilde{\omega}_m(t) \cdot \beta_j) \, dx + (c_a + c_d) \int_{\Omega} \nabla \tilde{\omega}_m(t) \cdot \nabla \beta_j \, dx \\ & + (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\omega}_m(t) \operatorname{div} \beta_j \, dx + 4\mu_r \int_{\Omega} \tilde{\omega}_m(t) \cdot \beta_j \, dx = \rho \int_{\Omega} \tilde{g}(t) \cdot \beta_j \, dx \\ & + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \tilde{u}_m(t) \cdot \beta_j \, dx + \rho I (\omega_m(0), \beta_j) \delta_0 - \rho I (\omega_m(T), \beta_j) \delta_T. \end{aligned}$$

On applique la transformée de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned} & 2\rho\pi i\tau (\widehat{u}_m(\tau), \alpha_j) + \rho (\widehat{u_m(t) \cdot \nabla} u_m(t)) \cdot \alpha_j \, dx + (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla \widehat{u}_m(\tau) \cdot \nabla \alpha_j \, dx = \rho \int_{\Omega} \widehat{f}(\tau) \cdot \alpha_j \, dx \\ & + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \widehat{\omega}_m(\tau) \cdot \alpha_j \, dx + \rho \int_{\Omega} u_m(0), \alpha_j \, dx - \rho e^{-2\pi i\tau T} \int_{\Omega} u_m(T), \alpha_j \, dx. \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\rho I \pi i \tau (\widehat{\omega}_m(\tau), \beta_j) + \rho I ((u_m(t) \cdot \widehat{\nabla}) \omega_m(t)) \cdot \beta_j dx + (c_a + c_d) \int_{\Omega} \nabla \widehat{\omega}_m(\tau) \cdot \nabla \beta_j dx \\
& + (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \operatorname{div} \widehat{\omega}_m(\tau) \operatorname{div} \beta_j dx + 4\mu_r \int_{\Omega} \widehat{\omega}_m(\tau) \cdot \beta_j dx = \rho \int_{\Omega} \widehat{g}(\tau) \cdot \beta_j dx \\
& + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \widehat{u}_m(\tau) \cdot \beta_j dx + \rho I \int_{\Omega} \omega_m(0) \cdot \beta_j dx - \rho I e^{-2\pi i \tau T} \int_{\Omega} \omega_m(T) \cdot \beta_j dx. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_m(\tau) &= \sum_{i=1}^m \widehat{g}_{im}(\tau) \alpha_i(x). \\
\widehat{\omega}_m(\tau) &= \sum_{i=1}^m \widehat{j}_{im}(\tau) \beta_i(x).
\end{aligned}$$

On multiplie (3.21), (3.22) par $\widehat{g}_{im}(\tau)$, $\widehat{j}_{im}(\tau)$ respectivement et on fait la somme pour i allant de 1 jusqu'à m , on obtient

$$\begin{aligned}
& 2\rho \pi i \tau |\widehat{u}_m|^2 + \rho \int_{\Omega} ((u_m \cdot \widehat{\nabla}) u_m) \cdot \widehat{u}_m dx + (\mu + \mu_r) |\nabla \widehat{u}_m|^2 = \rho \int_{\Omega} \widehat{f} \cdot \widehat{u}_m dx \\
& + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \widehat{\omega}_m \cdot \widehat{u}_m dx + \rho \int_{\Omega} u_m(0) \cdot \widehat{u}_m dx - \rho e^{-2\pi i \tau T} \int_{\Omega} u_m(T) \cdot \widehat{u}_m dx. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\rho I \pi i \tau |\widehat{\omega}_m|^2 + \rho I \int_{\Omega} ((u_m \cdot \widehat{\nabla}) \omega_m) \cdot \widehat{\omega}_m dx + (c_a + c_d) |\nabla \widehat{\omega}_m|^2 \\
& + (c_0 + c_d - c_a) |\operatorname{div} \widehat{\omega}_m|^2 + 4\mu_r |\widehat{\omega}_m|^2 = \rho \int_{\Omega} \widehat{g} \cdot \widehat{\omega}_m dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{curl} \widehat{u}_m \cdot \widehat{\omega}_m dx \\
& + \rho I \int_{\Omega} \omega_m(0) \cdot \widehat{\omega}_m dx - \rho I e^{-2\pi i \tau T} \int_{\Omega} \omega_m(T) \cdot \widehat{\omega}_m dx. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

La somme de (3.23), (3.24), après avoir pris le module de ces deux équations, donne

$$\begin{aligned}
|\tau| \left(|\widehat{u}_m(\tau)|^2 + |\widehat{\omega}_m|^2 \right) &\leq C \left(\left| \int_{\Omega} ((u_m \cdot \widehat{\nabla}) u_m) \cdot \widehat{u}_m dx \right| + \left| \int_{\Omega} ((u_m \cdot \widehat{\nabla}) \omega_m) \cdot \widehat{\omega}_m dx \right| \right) \\
&+ \left| \int_{\Omega} \widehat{f} \cdot \widehat{u}_m dx \right| + \left| \int_{\Omega} \widehat{g} \cdot \widehat{\omega}_m dx \right| + \left| \int_{\Omega} u_m(0) \cdot \widehat{u}_m dx \right| + \left| \int_{\Omega} \omega_m(0) \cdot \widehat{\omega}_m dx \right| + \\
&+ \left| \int_{\Omega} u_m(T) \cdot \widehat{u}_m dx \right| + \left| \int_{\Omega} \omega_m(T) \cdot \widehat{\omega}_m dx \right|, \quad (3.25)
\end{aligned}$$

où $C = \max(\rho, \rho I, c_a + c_d, c_0 + c_d - c_a, \mu + \mu_r, 4\mu_r)$.

Du lemme (8), l'inégalité (3.25) devient

$$\begin{aligned} |\tau| \left(|\widehat{u}_m(\tau)|^2 + |\widehat{\omega}_m|^2 \right) &\leq C \left(\left| (u_m \cdot \nabla) u_m \right|_{V'} + |\widehat{f}|_{V'} + |u_{m0}| + |u_m(T)| \right) \|\widehat{u}_m\| + \\ &\quad \left(\left| ((u_m \cdot \nabla) \omega_m) \right|_{V'} + |g|_{V'} + |\omega_{m0}| + |\omega_m(T)| \right) \|\widehat{\omega}_m\|. \end{aligned} \quad (3.26)$$

De (3.19) et grâce aux hypothèses (3.4)-(3.5), on déduit l'inégalité

$$|\tau| \left(|\widehat{u}_m(\tau)|^2 + |\widehat{\omega}_m|^2 \right) \leq C_1 \|\widehat{u}_m(\tau)\| + C_2 \|\widehat{\omega}_m\|. \quad (3.27)$$

Comme $|\tau|$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$, on multiplie donc (3.27) par $\frac{1}{1 + \tau^\sigma} \in L^2(\mathbb{R})$ si $\sigma > \frac{1}{2}$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau|}{1 + \tau^\sigma} \left(|\widehat{u}_m(\tau)|^2 + |\widehat{\omega}_m(\tau)|^2 \right) d\tau \leq C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\widehat{u}_m(\tau)\|}{1 + \tau^\sigma} d\tau + C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\widehat{\omega}_m(\tau)\|}{1 + \tau^\sigma} d\tau$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de Parseval, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau|}{1 + \tau^\sigma} \left(|\widehat{u}_m(\tau)|^2 + |\widehat{\omega}_m(\tau)|^2 \right) d\tau \leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \tau^\sigma)^2} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T (\|u_m(t)\|^2 + \|\omega_m(t)\|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Les suites u_m et ω_m sont uniformément bornées dans $L^2(0, T; V)$ et $L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^3)$ respectivement, alors on peut appliquer le lemme de compacité, voir le lemme 1, en prenant $X_0 = V$, $X = X_1 = (L^2(\Omega))^3$.

3.6 Passage à la limite dans le système approchée

Lemme 9. :

Si $u_\mu \rightharpoonup u$ dans $L^2(0, T; V)$ et $u_\mu \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; H)$,

Si $\omega_\mu \rightharpoonup \omega$ dans $L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^3)$ et $\omega_\mu \rightarrow \omega$ dans $L^2(0, T; H)$.

Alors $\forall W, v$ deux fonctions vectorielle dans $\mathbb{C}^1(\Omega_T)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_\mu(t) \cdot \nabla) u_\mu(t) \cdot v(t) dt &\rightarrow \int_0^T (u(t) \cdot \nabla) u(t) \cdot v(t) dt. \\ \int_0^T (u_\mu(t) \cdot \nabla) \omega_\mu(t) \cdot W(t) dt &\rightarrow \int_0^T (u(t) \cdot \nabla) \omega(t) \cdot W(t) dt. \end{aligned}$$

Grâce à ce lemme et à l'estimation (3.20), on peut passer à la limite dans le système approchée. Il reste à vérifier que u la limite de u_m satisfait la condition initiale u_0 soit $\Psi(t)$ fonction continue et différentiable sur $[0, T]$ et vérifiant

$$\Psi(T) = 0.$$

On multiplie l'équation (3.17) par $\Psi(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \rho \int_0^T \int_{\Omega} (u'_m \cdot \alpha_j \Psi(t) + (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot \alpha_j \Psi(t)) dx dt + (\mu + \mu_r) \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla \alpha_j \Psi(t) dx dt = \\ \rho \int_0^T \int_{\Omega} f \cdot \alpha_j \Psi(t) dx dt + 2\mu_r \int_0^T \int_{\Omega} \text{curl } \omega_m \cdot \alpha_j \Psi(t) dx dt. \end{aligned}$$

L'intégration par partie donne

$$\begin{aligned} -\rho \int_0^T \int_{\Omega} (u_m \cdot \alpha_j \Psi'(t) - (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot \alpha_j \Psi(t)) dx dt + (\mu + \mu_r) \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla \alpha_j \Psi(t) dx dt = \\ \rho \int_0^T \int_{\Omega} f \cdot \alpha_j \Psi(t) dx dt + 2\mu_r \int_0^T \int_{\Omega} \text{curl } \omega_m \cdot \alpha_j \Psi(t) dx dt + \int_{\Omega} \psi(0) u_{0m} \cdot \alpha_j dx. \quad (3.28) \end{aligned}$$

On passe à la limite :

On rappelle que la convergence faible en $L^p(0, T; X)$ implique la convergence faible dans $D'(\Omega)$, et on a

$u_m \rightharpoonup u$ dans $L^2(0, T; V)$, alors $u_m \rightharpoonup u$ dans $D'(\Omega)$, donc $\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u$ dans $D'(\Omega)$, $\text{curl } u_m \rightharpoonup \text{curl } u$ dans $D'(\Omega)$

On passe à la terme non linéaire $\int_0^T (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot \alpha_j \Psi(t) dt$, et d'après le lemme (9), on trouve facilement

$$\int_0^T (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot \alpha_j \Psi(t) dt \rightharpoonup \int_0^T (u \cdot \nabla) u \cdot \alpha_j \Psi(t) dt.$$

Alors l'équation (3.28) devient

$$\begin{aligned} -\rho \int_0^T \int_{\Omega} (u \cdot \alpha_j \Psi'(t) - (u \cdot \nabla) u \cdot \alpha_j \Psi(t)) dx dt + (\mu + \mu_r) \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \alpha_j \Psi(t) dx dt = \\ \rho \int_0^T \int_{\Omega} f \cdot \alpha_j \Psi(t) dx dt + 2\mu_r \int_0^T \int_{\Omega} \text{curl } \omega \cdot \alpha_j \Psi(t) dx dt + \int_{\Omega} \psi(0) u_0 \cdot \alpha_j dx. \quad (3.29) \end{aligned}$$

D'autre part on multiple (3.15) par $\Psi(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \int_{\Omega} (u(t) \cdot v \Psi'(t) - (u \cdot \nabla)u \cdot v \Psi(t)) dx dt + (\mu + \mu_r) \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \Psi(t) dx dt = \\ & \rho \int_0^T \int_{\Omega} f \cdot v \Psi(t) dx dt + 2\mu_r \int_0^T \int_{\Omega} \text{curl } \omega \cdot v \Psi(t) dx dt + \int_{\Omega} \psi(0) u(0) \cdot v dx. \end{aligned} \quad (3.30)$$

On prend $\alpha_j = v, \psi(0) = 1$ et après la soustraction de (3.30)-(3.29), on obtient

$$\int_{\Omega} u(0) \cdot v dx - \int_{\Omega} u_0 v dx = 0, \text{ donc}$$

$$u(0) = u_0.$$

De le même, on trouve

$$\omega(0) = \omega_0.$$

D'après l'équation (3.30), et qu'on le prend $\psi \in D(]0, T[)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \cdot v dx + \rho \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u \cdot v dx + (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \\ & + \rho \int_{\Omega} f \cdot v dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \text{curl } \omega \cdot v dx. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Cette équation satisfaite dans $D'([0, T])$, donc l'équation devient

$$\rho \frac{du(t)}{dt} = R(u)$$

telle que R est un opérateur vérifie

$$(R(u), v) = -\rho \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u \cdot v dx - (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \rho \int_{\Omega} f \cdot v dx + 2\mu_r \int_{\Omega} \text{curl } \omega \cdot v dx.$$

On remarque que $R(u) \in L^1(0, T; V')$, donc $\frac{du(t)}{dt} \in L^1(0, T; V')$, et d'après le théorème (2.5) on trouve

$$u \in C([0, T], V')$$

D'autre part, on a $u \in L^\infty(0, T, H)$, alors d'après le lemme (2), on obtient

$$u \in C([0, T]; H_{faible})$$

Ce qui donne un sens à la conduction initiale $u(0)$.

Conclusion

Dans ce mémoire on a montré l'existence d'une solution faible d'un problème de l'écoulement d'un fluide micropolaire en dimension trois. Dans cette dimension, qui est supérieure strictement à deux, l'unicité de la solution est une problème ouvert qui est du à la présence du terme non linéaire de Navier-Stokes. Ces résultats ont été obtenus par l'application de la méthode de Faedo-Galerkin et le théorème de compacité d'Aubin.

Bibliographie

- [1] F. Boyer, P.Fabrie, Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models, Springer New York(2013).
- [2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application, Masson(1983).
- [3] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer New York Heidelberg Dordrecht London(2010).
- [4] A.C. Eringen, Theory of Micropolar Fluids, J. Math. Mech. 16, No. 1, pp. 1-16 (1966).
- [5] G.Lukaszewicz, Micropolar fluids (Theory and Application), Birkhauser Boston(1999).
- [6] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaire, Paris, Dunod(1969).
- [7] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluids Mechanics, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Application. 10, Vol. 2.
- [8] R. Temam, Navier-Stokes equations, New York(1977).
- [9] G. Thierry, H.Raphaële, Equations aux dérivées partielles, Université Aix Marseille 1 (2011).